TD2

ENCORE DES SUITES.

Exercice 1 *Vrai ou faux.*

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
2. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
3. Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
5. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
6. Une suite convergente et majorée est croissante.
7. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
8. Une suite strictement croissante diverge vers $+\infty$.
9. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
10. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors on ne peut pas conclure sur la limite du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ (forme indéterminée).
11. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, alors la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est divergente.

Exercice 2 *Probabilités et suites.*

Dans une région imaginaire, les prévisions météo suivent la règle suivante : s'il fait beau un jour donné, il fera beau le lendemain avec la probabilité 0,4, et s'il ne fait pas beau, il ne fera pas beau le lendemain avec la probabilité 0,8. Au 1$^{\text{er}}$ jour, il fait beau.

On note B_n l'événement : "il fait beau le n^{e} jour", et sa probabilité $b_n = P(B_n)$.

1. Donner la valeur de b_1.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer b_{n+1} en fonction de b_n.
3. En déduire b_n en fonction de n.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Exercice 3 *suite récurrente linéaire d'ordre 2.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Résoudre l'équation caractéristique liée à cette suite, puis déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 **ECRICOME** *2020 Exercice 2.*

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n. Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $x \geqslant 0$,
$$f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$
2. Étudier les variations de f_n.
3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée seconde. En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
4. **a.** Démontrer que pour tout $t \geqslant 1$, $t^{2n}-1 \geqslant n(t^2-1)$.
   b. Montrer alors que pour tout $x \geqslant 1$, $f_n(x) \geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2$.
   c. En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Calculer $f_n(0)$ puis montrer que $f_n(1) < 0$.
6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.

On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite. On étudie dans cette partie le comportement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right).$$
8. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.
   c. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.
9. **a.** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.
   b. À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4b de la partie **A**, montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$
   Quelle est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 **ECRICOME** *2019 Exercice 2.*

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul, la fonction h_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. **a.** Démontrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1}{x^{n+1}}.$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

c. Montrer alors que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. **a.** Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ et que $\ell \geqslant 1$.

b. En supposant que $\ell > 1$, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$.

En déduire une contradiction.

c. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. **a.** Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n \leqslant 3$.

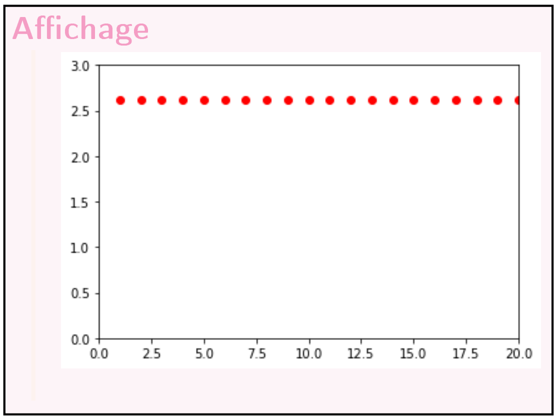
b. Écrire une fonction Python d'en-tête def h(n,x) : qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

c. Compléter le programme ci-dessous pour qu'elle renvoie une valeur approchée de v_n à 10^{-5} près par la valeur de la dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier n en entrée.

```
def valeur_approchee(n):
  a = 1
  b = 3
  while (b-a)>10**(-5) :
    c = (a+b)/2
    if h(n,c) < 4 :
      .......
    else :
      .......
  return a
```

d. À la suite de la fonction valeur_approchee, on écrit le programme suivant dont l'exécution est représentée ci-contre :

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = range(1,21)
Y = []
for k in range(1,21):
  Y.append(valeur_approchee(k)**k)
plt.plot(X,Y,'bo')
plt.axis((0,20,0,3))
plt.show()
```



Expliquer ce qui est conjecturé sur le graphique. Que peut-on conjecturer ?

e. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

f. Retrouver ainsi le résultat de la question 4c.